Soluções

Thiago Landim

1 Soluções

1.1 O sexo dos dois filhos são variáveis aleatórias independentes. Logo a probabilidade de que ambos os filhos sejam meninos é a probabilidade do segundo filho ser menino, que é $\frac{1}{2}$.

1.2 Por outro lado, agora não sabemos quem é menino e quem não é. Porém, saber que um dos filhos é um menino nos permite reduzir o espaço amostral para o seguinte:

$$\{(\text{menino}, \text{menina}), (\text{menina}, \text{menino}), (\text{menino}, \text{menino})\},$$

onde a primeiro é o mais velho, e o segundo é o mais novo. Não temos mais nenhuma informação, então esses 3 casos são equiprováveis e a probabilidade de que ambos os filhos sejam meninos é $\frac{1}{3}$.

1.3 O raciocínio é o mesmo do problema anterior, porém mais caricata. Novamente, nós podemos escrever todas as distribuições de meninos e meninas, mas agora incluímos o dia da semana em que as crianças nasceram. Temos 27 possível resultados para a informação do sexo e do dia de nascimento, dos quais 13 são favoráveis. Como não possuímos nenhuma informação adicional, nós concluímos que a probabilidade que Clara tenha dois meninos é dada por $\frac{13}{27}$.

1.4 Suponha que nós abrimos o envelope e vemos x reais nele. Se decidirmos trocar, então há 50% de chance de nós ficarmos com $x/2$ e 50% de chance de ficarmos com $2x$. Assim, o valor esperado é dado por

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + 2x\right) = \frac{5}{4}x > x,$$

e a melhor estratégia é trocar o envelope.

1.5 Por um lado, metade dos ônibus passam com 15min de intervalo e metade deles passam com 45min de intervalo. Da nossa perspectiva, como $45 = 3 \cdot 15$, então em 75% das vezes que formos à parada, estaremos dentro de um intervalo de 45min, e em 25% deles estaremos em um intervalo de 15min. Por fim, note que, como não possuímos nenhuma informação a respeito do ônibus, estaremos, em média, no meio do intervalo. Assim, o tempo esperado é dado por

$$\frac{3}{4}22,5+\frac{1}{4}7,5=\frac{75}{4}=18,75\text{min}.$$

2.5 Usaremos nossa ideia padrão. Vamos reduzir nossa variável aleatória a uma soma de variáveis de Bernoulli (aquelas que podem ser apenas 0 ou 1). Com isso em mente, vamos enumeras os bebês por B_i para i de 1 a 2006, e defina

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{se o } i\text{-ésimo bebê não foi cutucado,}\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Se X = quantidade de bebês cutucados, então $X=X_1+X_2+\cdots+X_{2006}$. Assim, podemos usar a linearidade para concluir que

$$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X_1]+\mathbb{E}[X_2]+\cdots+\mathbb{E}[X_{2006}].$$

Por outro lado, sabemos calcular a esperança de X_i. A probabilidade que ele **não** seja cutucado é $\frac{1}{4}$ (se ambos os seus vizinhos cutucarem o outro bebê). Assim, o valor esperado de bebês não cutucados é dado por $\mathbb{E}[X]=2006\cdot\frac{1}{4}=501,5$.

2.6 Elevando ao quadrado, vemos que a desigualdade desejada é dada por

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k z_k\right|^2\leq 1.$$

Com um pouco de coragem, nós abrimos o produto do valor absoluto, pois $|z|^2=z\bar{z}$, e vemos que

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k z_k\right|^2=\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j z_i\bar{z}_j.$$

Agora, considere que os ε_i são variáveis aleatórias com valores em $\{-1,+1\}$ de mesma probabilidade. Note que $\mathbb{E}[\varepsilon_i^2]=1$ e $\mathbb{E}[\varepsilon_i\varepsilon_j]=0$, se $i\neq j$. Portanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j z_i\bar{z}_j\right]=\sum_{i=1}^{n}z_i\bar{z}_i=1,$$

e existe uma escolha dos ε_i tais que a soma tem módulo ≤ 1.

2.11 Como nossa condição diz respeito aos meninos (a quantidade de meninas que *eles* conhecem), nós vamos começar com as meninas. Como desejamos metade dos alunos, escolha cada menina com probabilidade $\frac{1}{2}$, e adicionamos todos os meninos que conhecem uma quantidade ímpar das meninas escolhidas. Seja A a quantidade de meninas escolhidas, O a quantidade de meninos escolhidos, e X a quantidade de estudantes no grupo. Então $X = A + O$ e, por construção, $\mathbb{E}[A]$ é metade da quantidade de meninas.

Por outro lado, para cada i-ésimo menino, podemos definir O_i por 1, se a quantidade de meninas que ele conhece no grupo é ímpar, e 0 caso contrário. Desejamos mostrar que $\mathbb{E}[O_i] = \frac{1}{2}$. Note que, se k é a quantidade de meninas que ele conhece, então a quantidade de meninas que ele conhece no grupo é descrita pela distribuição binomial $\mathrm{Bin}(k, \frac{1}{2})$. Note, então, que, se $k \geq 1$, é possível mostrar por indução que a probabilidade que ele conheça uma quantidade ímpar de meninas é $\frac{1}{2}$. Portanto $\mathbb{E}[O_i]$ é $\frac{1}{2}$ e o valor esperado de X é metade da quantidade total de alunos, de onde concluímos que existe uma escolha com pelo menos metade dos estudantes.

2.12 Suponha que os n pares na dança são escolhidos aleatoriamente, e seja X a quantidade de casais com inimizade. Se

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo casal possui inimizade,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

então $X = X_1 + X_2 + \cdots X_n$. Por outro lado, como cada par é aleatório, sabemos que

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2},$$

de onde segue que

$$\mathbb{E}[X] = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Portanto há alguma forma de pareá-los de modo que não haja casais com inimizades.

2.13 Como a hipótese diz respeito a um ou outro participante, a quantidade de participantes não parece ser uma variável aleatória, logo nós vamos começar com essa informação.

Vamos escolher aleatoriamente dois participantes P_1 e P_2 e digamos que $X =$ quantidade de questões que ambos erraram. Escolha as variáveis aleatórias

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se } P_1 \text{ e } P_2 \text{ erraram a questão,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_6$.

Por outro lado,

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{P}[P_1 \text{ e } P_2 \text{ erraram a } i\text{-ésima questão}] \leq \frac{\binom{80}{2}}{\binom{200}{2}} = \frac{2}{5}\frac{79}{199}.$$

Portanto

$$\mathbb{E}[X] = 6 \cdot \frac{2}{5}\frac{79}{199} < 1,$$

de onde segue que existe um par de participantes tal que cada problema foi resolvido por pelo menos um deles.

2.14 Seja A um conjunto com 7 elementos escolhido aleatoriamente e seja X a quantidade de times que perderam de todos os times de A. Novamente, defina

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo time perdeu de todos os times de } A, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por fim, defina d_i a quantidade de times que derrotou o i-ésimo time. Então podemos usar a convexidade da função $\binom{n}{7}$ e o fato que $\sum_{i=1}^{799} d_i = \binom{799}{2} = 399$ para concluir que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{799} \frac{\binom{d_i}{7}}{\binom{799}{7}} \geq 799\frac{\binom{399}{7}}{\binom{799}{7}} \approx 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 6,25.$$

Logo existe uma escolha de A tal que $X \geq 7$, o que nos permite construir B de tamanho 7 que satisfaz o desejado.