Problemas de Desigualdades - Prolímpico

Thiago Landim

1 Problemas Parte I

Problema 1. Sejam a, b, c reais positivos tais que $abc = 1$. Mostre que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

Problema 2. Para reais positivos a, b, c, mostre que

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1.$$

Problema 3. Para quaisquer reais positivos a, b, c, d, mostre que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Problema 4. Mostre que se a equação $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$ tem pelo menos uma raiz real, então $a^2 + b^2 \geq 8$.

Problema 5. Se $a, b, c, d, e \in [p, q]$ com $p > 0$, mostre que

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right) \leq 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

Problema 6. Mostre que para todos os reais não-negativos $a, b, c \leq 1$

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

2 Problemas Parte II

Questão 1. Sejam a, b, c e d números reais quaisquer. Qual a quantidade máxima de valores entre os números $a - b^2$, $b - c^2$, $c - d^2$ e $d - a^2$ que pode ser maior que $\frac{1}{4}$?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Questão 2. Sejam a, b, c, d reais não-negativos tais que $a + b + c + d = 4$. O máximo de

$$abcd\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\right)$$

é dado por:

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

Questão 3. Sejam a, b, c reais positivos tais quaisquer. Qual o valor mínimo de

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2?$$

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$

E) 1

Questão 4. Para x_1, x_2, $x_3 \in [0, 1]$, qual o máximo da soma $\sum_{i<j} |x_i - x_j|$?

A) 1

B) $\frac{5}{4}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{7}{4}$

E) 2

3 Soluções

Solução do Problema 1. Multiplicamos o lado esquerdo por abc e o lado direito por $(abc)^{2/3}$ para ficarmos com

$$a^2c + b^2a + c^2b \geq a^{5/3}b^{2/3}c^{2/3} + a^{2/3}b^{5/3}c^{2/3} + a^{2/3}b^{2/3}c^{5/3}.$$

Agora só resta usar a desigualdade MA-MG para resolver o problema. Note que

$$\frac{a^2c + a^2c + b^2a}{3} \geq a^{5/3}b^{2/3}c^{2/3}.$$

Fazendo o mesmo com os outros termos, chegamos na desigualdade desejada.

Solução do Problema 2. Desejamos usar a desgigualdade de Nesbitt, mas para isso precisamos "mudar" o lado da desigualdade. Para tanto, nós usamos que

$$\frac{a}{2a+b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{b}{2a+b}.$$

Substituindo essa igualdade e simplificando, nós obtemos

$$\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} \geq 1.$$

Mudamos a cara das frações para podermos usar a desigualdade de Nesbitt

$$\frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2} + \frac{a^2}{2ac+c^2} \leq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} = 1,$$

como desejávamos.

Solução do Problema 3. Essa desigualdade é uma consequência do Lema de Titu, pois

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2^2}{c} + \frac{4^2}{d} \geq \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d} = \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Solução do Problema 4. Vamos usar a contrapositiva, portanto suponha $a^2 + b^2 < 8$. Podemos re-escrever a equação como

$$x^2\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}x + 1\right)^2 + \frac{1}{4}(8 - a^2 + b^2)x^2 = 0.$$

Como todos os fatores são quadrados, isso significa que cada um deles precisa ser 0. Ou seja, $x = 0$ e também $\frac{b}{2}x + 1 = 0$, o que é impossível. Portanto se $a^2 + b^2 < 8$, então não existe solução real para a equação.

Solução do Problema 5. Expandindo a multiplicação, podemos ver que a função, em cada variável, é uma combinação de uma função afim com algo da forma $\frac{1}{x}$, que é convexo. Isso significa que os máximos são atingidos nos extremos. Assim, basta separar em casos.

- Se todos os números são iguais a p, então ficamos com 25, que é limitado pelo lado direito.
- Se quatro números são iguais a p e um é igual a q, então ficamos com

$$(4p+q)\left(\frac{4}{p}+\frac{1}{q}\right) = 17 + 4\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right) \leq 13 + 6\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right),$$

  que é exatamente o lado direito lado direito.
- Se três números são iguais a p e dois deles são iguais a q, então ficamos com

$$(3p+2q)\left(\frac{3}{p}+\frac{2}{q}\right) = 13 + 6\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right),$$

  que, novamente, é o lado direito.

Sendo os outros casos inteiramente análogos aos três primeiros, a demonstração está completa.

Solução do Problema 6. Novamente, em cada variável, a função é uma soma de funções lineares e funções da forma $\frac{1}{x+\text{cte}}$. Portanto os máximos vão ocorrer com $a, b, c \in \{0, 1\}$. Separaremos em casos uma outra vez.

- Se todos os números são 1, então ficamos com

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0 = 1$$

- Se dois números são 1, e um deles é 0, então ficamos com

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+0 = 1$$

- Se um número é igual a um, e os outros dois são 0, então ficamos com

$$1+0+0+0 = 1$$

- Se todos os números são 0, então ficamos com

$$0+0+0+1 = 1.$$

Como todos esses valores são 1, então a função é sempre limitada superiormente por 1.

Solução do Questão 1. Basta substituir os valores $a = 2, b = 1, c = 0$ e $d = -2$, que nos dará os números 3, 1, 2 e 2, todos maiores que $\frac{1}{4}$.

Solução do Questão 2. Primeiramente, note que se $a = b = c = d = 1$, então o valor é 4. Mostraremos que esse é o máximo atingido pela expressão. De fato, multiplicando todos os termos, ficamos com

$$a^2cd + b^2da + c^2ab + d^2bc.$$

Mostraremos que $16(a^2cd+b^2da+c^2ab+d^2bc) \leq 64$. De fato, como $a+b+c+d = 4$, então se reduz a

$$(a+b+c+d)^3 \geq 16(a^2cd + b^2da + c^2ab + d^2bc).$$

Note que ambos os lados possuem 64 monômios, e o resultado segue de uma utilização repetida da desigualdade das médias.

Solução do Questão 3. Na solução do problema 2, nós vimos que

$$\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} \geq 1.$$

Assim, basta provar que $x + y + z \geq 1$ implica que $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$. Mas isso segue do fato que

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zy = (x + y + z)^2 = 1.$$

Solução do Questão 4. Novamente, note que a expressão dada é convexa em cada variável, então o máximo é dado nos extremos, e portanto reduzimos a uma análise de casos.

- Se todos os números são 1, então o valor da soma é 0.
- Se dois números são 1, e um deles é 0, então ficamos com 2.
- Se um número é 1, e dois deles são 0, então ficamos com 2.
- Se todos os números são 0, novamente a soma é 0.

Desse modo, o máximo é dado por 2.

4 Soluções Parte II

Resposta da Questão 1. D)
Resposta da Questão 2. C)
Resposta da Questão 3. B)
Resposta da Questão 4. E)