Combinatória e Método Probabilístico

Thiago Landim

1 Problemas

Lema de Littlewood-Offord. Sejam x_1, $x_2, \ldots,$ x_n números reais não-nulos não necessariamente distintos, e considere todas as 2^n somas $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i$ onde $\varepsilon_i = +1$ ou -1. Mostre que no máximo $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ delas são iguais a 0. Em particular,

$$\mathbb{P}[\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n = 0] \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

para alguma constante C.

Problema relacionado (CIIM, 2019). Seja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais não-nulos. Para $m \geq 1$, definimos:

$$X_m = \left\{ X \subseteq \{0, 1, \ldots, m-1\} : \left| \sum_{x \in X} a_x \right| > \frac{1}{m} \right\}.$$

Demonstre que

$$\lim_{n \infty} \frac{|X_n|}{2^n} = 1.$$

Lema 2 (Zarankiewicz). Mostre que existe uma partição dos inteiros positivos em duas classes tais que nenhuma contém uma progressão aritmética infinita e nenhuma contém três inteiros consecutivos.

Problema relacionado (IMO SL, 1987) Mostre que podemos colorir o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1987\}$ com quatro cores de modo que qualquer progressão aritmética com dez termos, cada qual no conjunto, não é monocromática.

Lema 3 (Erdős). Um conjunto S é dito livre de somas se não existem a, b, $c \in S$ tais que $a + b = c$. Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ um conjunto com n elementos. Então existe $B \subseteq A$ livre de somas com $> \frac{n}{3}$ elementos.

Problema relacionado (IMO SL, 1999). Seja A um conjunto qualquer com n resíduos mod n^2. Mostre que existe um conjunto B com n resíduos mod n^2 tal que pelo menos metade dos resíduos mod n^2 podem ser escritos da forma $a + b$ com $a \in A$ e $b \in B$.

Lema do Cruzamento. Dado um grafo G, definimos seu número de cruzamentos $\mathrm{cr}(G)$ como a menor quantidade possível de cruzamentos entre duas arestas quando desenhamos esse grafo no plano (por exemplo, um grafo é planar se e somente se $\mathrm{cr}(G) = 0$). Mostre que, se G tem n vértices e m arestas e $m \geq 4n$, então

$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{m^3}{64n^2}.$$

Problema relacionado (IMO, 1971). Prove que para qualquer número natural m, existe um conjunto finito S de ponto no plano com a seguinte propriedade: Para qualquer ponto A em S, existe exatamente m pontos em S que estão a uma distância 1 de A.

2 Dicas

Lema de Littlewood-Offord. Olhe para a coleção $X \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ dos índices tais que o $\varepsilon_i = +1$ e note que forma uma anticadeia (isto é, nenhum elemento está contido em algum outro) e então use o Lema de Sperner. Para a afirmação final, use a fórmula de Stirling (ou qualquer versão mais fraca dela).
Problema relacionado 1. Adapte a demonstração do lema de Littlewood-Offord para mostrar o seguinte: Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são reais de módulo pelo menos ε, então, *em geral*,

$$|x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}| \geq \varepsilon/2.$$

Lema (Zarankiewicz). Primeiramente, procure um subconjunto de $\mathbb{N}$ sem progressões aritméticas infinitas. Em seguida, use paridade para impor a outra hipótese na coloração.

Também é possível usar probabilidade. Se você colorir cada natural de azul ou vermelho com probabilidade $1/2$, então com probabilidade 0 haverá uma progressão aritmética infinita monocromática. Como há uma quantidade enumerável de progressões aritméticas, concluímos que (mais ainda!) quase todas as colorações satisfazem essa propriedade.
Problema relacionado 2. Qual a probabilidade de haver uma progressão aritmética monocromática com **10** termos? Quantas progressões aritméticas com 10 termos nós temos?
Lema (Erdős). Primeiramente, precisamos adicionar alguma *aleatoriedade*. Considere $A \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ para algum primo muito grande. Em $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, é possível encontrar um conjunto livre de somas grande e canônico. Daí, basta usar o 'gira-gira' de maneira aleatória e usar o valor esperado.
Problema relacionado 3. Escolha n elementos de maneira uniforme e independente (pode haver repetição) e calcule a esperança. Use que $1 + x \leq e^x$ para cotar a probabilidade.
Lema de Cruzamento. Primeiramente, note que, se G é planar, então $m \leq 3n - 6$. Assim, de modo geral, $\mathrm{cr}(G) \geq m - 3n$. Assim, para um subgrafo $H \subset G$ aleatório,

$$\mathbb{E}[\mathrm{cr}(H)] \geq \mathbb{E}[e(H)] - 3\mathbb{E}[v(H)].$$

Escolhendo cada vértice de maneira uniforme com probabilidade p e otimizando em p, nós chegamos na desigualdade.
Problema relacionado 4. Escolha m pontos no círculo unitário, e considere S o conjunto das 2^m somas possíveis de vetores. Temos uma quantidade finita de condições a impor e infinitos pontos no círculo (visto de outra forma, podemos ir escolhendo recursivamente).