Jogos e Tabuleiros

Thiago Landim

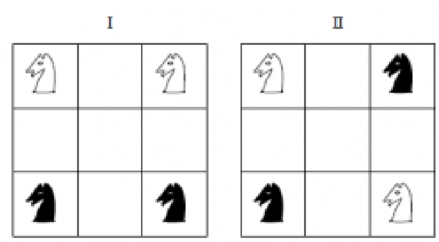
Março 2020

1 Problemas iniciais

Problema 1 (Xadrez duplo!)**.** As regras do xadrez são alteradas da seguinte forma: as pretas e as brancas fazem, cada um, dois movimentos legais. Mostre que existe uma estratégia para as brancas que garante a elas pelo menos o empate.

Problema 2 (OBM)**.** Qual o menor valor de $n > 1$ tal que é possível colocar n rainhas sobre um tabuleiro $n \times n$ sem que nenhuma esteja atacando a outra?

Problema 3 (Puzzle dos quatro cavalos)**.** Quatro cavalos estão posicionados em um tabuleiro 3×3 conforme o primeiro tabuleiro. É possível movê-los para as posições do segundo tabuleiro?



Problema 4 (Treinamento IMO, 2017)**.** Considere um tabuleiro $n \times n$. Qual é a maior quantidade de casas que podemos escolher do tabuleiro de modo que não haja um paralelogramo cujos vértices são os centros de quatro das casas escolhidas?

Problema 5. Alguns asteriscos estão escritos nas casas de um tabuleiro $m \times n$ (com $m < n$), de modo que existe pelo menos um asterisco em cada coluna. Mostre que que existe um asterisco A tal que $l_A > c_A$, onde l_A e c_A denotam as quantidade de asteriscos na linha e coluna de A, respectivamente.

Problema 6 (Romênia TST, 2012)**.** Encontre a maior quantidade de reis em um tabuleiro de xadrez 12×12 de modo que cada rei ataca exatamente um outro rei.

Problema 7. Em um tabuleiro 8×8, uma torre está na casa $a1$. Dois jogadores movem a torre com objetivo de colocar a torre na casa $h8$. Sabendo que a torre pode mover-se apenas para cima ou para direita (quantas casas o jogador desejar) eque não pode-se passar a vez,determine qual jogador tem a estratégia vencedora.

Problema 8 (OBM)**.** Ana e Beatriz estão jogando o seguinte jogo em um tabuleiro $2 \times n$. A começar por Ana, cada jogadora coloca uma peça de dominó no tabuleiro, de modo a não sobrepôr nenhum dominó previamente posicionado. Encontre, em função de n, quem possui a estratégia vencedora.

Problema 9 (Holanda TST, 2018)**.** Suponha que é dado um tabuleiro $2m \times 2n$, onde m e n são inteiros positivos. Você pode colocar um peão em qualquer casa do tabuleiro, com exceção da casa inferior esquerda e da superior direita. Após posicionar o peão, um caracol quer fazer uma jornada pelo tabuleiro. Começando da casa inferior à esquerda, ele deseja visitar cada casa exatamente uma vez, com exceção daquela onde o peão está. Além disso, ele deseja terminar o percurso da casa superior direita. Ele só pode se mover horizontalmente e verticalmente no tabuleiro.

Em quais casas nós podemos colocar o peão de modo que o caracol consiga terminar sua jornada?

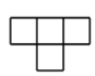
Problema 10. Seja n um inteiro positivo. É possível que um cavalo do xadrez passe por todas as casas de um tabuleiro $4 \times n$ exatamente uma vez e, em seguida retorne para o quadrado original?

Problema 11. Thiago desafia Andrey e Rodrigo para o seguinte jogo. Primeiramente, Thiago posiciona uma moeda em cada uma das casas de um tabuleiro de xadrez, com as faces como bem desejar. Em seguida, ele aponta para uma das moedas, e Andrey escolhe uma moeda qualquer para virar. Rodrigo, então, entra na sala e deve adivinhar para qual moeda Thiago apontou.

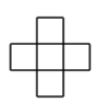
Andrey e Rodrigo possuem estratégia vencedora?

2 Problemas desafiadores

Problema 12. Podemos cobrir um tabuleiro 10×10 só usando T-tetraminós como abaixo?



Problema 13 (Rússia)**.** Podemos cobrir um tabuleiro 75×75 usando dominós e cruzes (como na figura a seguir)?



Problema 14 (IMO SL, 2009)**.** Para um inteiro $m \geq 1$, considere as partições de um tabuleiro $2^m \times 2^m$ em retângulos de casas de xadrez, no qual cada uma das 2^m casas da diagonal forma um retângulo de lados 1. Determine a menor soma possível dos perímetros dos retângulos em uma partição dessa forma.

Problema 15 (Rússia)**.** Bruno pintou k casas de um tabuleiro $n \times n$ de preto. Ele observou que não existiam quatro casas pretas formando um retângulo com lados paralelos aos lados do tabuleiro. Mostre que:

$$k \leq n\left(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right).$$

Problema 16 (EGMO, 2016)**.** Seja m um inteiro positivo e considere um tabuleiro $4m \times 4m$. Duas casas distintas são relacionadas se elas estão na mesma linha ou na mesma coluna. Nenhuma casa está relacionada a si mesma. Algumas casas são coloridas de azul, de modo que toda casa está relacionada a pelo menos duas casas azuis. Determine a quantidade mínima de casas azuis.

Problema 17 (Treinamento Conesul, 2020)**.** Em um tabuleiro de xadrez infinito, são colocadas 2019 peças de papelão $n \times n$ tais que cada uma dessas peças cobre exatamente n^2 casas do tabuleiro. Prove que o número de casas do tabuleiro que são cobertas por um número ímpar de peças de papelão é pelo menos n^2.

Problema 18 (Treinamento Conesul, 2020)**.** Peões e torres estão dispostos em um tabuleiro de xadrez 2019×2019, com no máximo uma peça em cada um dos 2019^2 quadrados. Dizemos que uma torre pode ver outra se elas estão na mesma linha ou na mesma coluna e todas as casas entre elas estão vazias. Qual o maior inteiro p tal que p peões e $p + 2019$ torres podem ser colocados no tabuleiro de modo que não haja duas torres que se vejam?

Problema 19 (Treinamento Conesul, 2020)**.** Em um tabuleiro $m \times n$ com casinhas 1×1 coloridas em preto ou branco, uma casinha preta é dita encurralada se há alguma casinha branca à sua esquerda em sua linha e também alguma casinha branca acima dela em sua coluna. Encontre uma fórmula fechada em função de n, apenas) para o número de tabuleiros $2 \times n$ sem casinhas pretas encurraladas.

3 Dicas

12. Pinte como um tabuleiro de xadrez, dê nome à quantidade de T-tetraminós coloridos diferentemente e encontre uma equação para cada cor. Mostre que o sistema encontrado não tem solução inteira.

13. Pinte o tabuleiro como um tabuleiro de xadrez, dê nome à quantidade de cada uma das peças pintadas diferentemente e subtraia as equações.

14. Contar cada escada separadamente. Separe os retângulos em quais colunas eles intersectam e use *convexidade*.

15. Foque nas linhas. Primeiramente, chame de a_i a quantidade de casas pintadas na i-ésima linha. Então coloque uma etiqueta (k, l) em um par de casas pintadas na mesma linha i se uma casa está na coluna k e outra está na coluna k, e note que as etiquetas devem ser todas distintas.

16. Construa um grafo a partir do problema. Os vértices são dados por linhas ou colunas do tabuleiro, e ligamos uma linha a uma coluna se a casa entre eles é azul. Conte a quantidade de componentes conexas e use isso para limitar a quantidade de arestas.

17. Pinte o tabuleiro com n^2 diferentes de uma maneira especial. (Imagine um tabuleiro $n \times n$, onde cada casa tem uma cor diferente e vá repetindo esse padrão infinitamente.)

18. Chame t_i a quantidade de torres na i-ésima linha (para $1 \leq i \leq 2019$). O que podemos dizer da quantidade de peões na i-ésima linha?

19. Note que a informação realmente importante é dada pelas casas da segunda linha. Separe em vários casos, dependendo de uma casa branca especial, e some todos esses casos.

Para mais problemas e informações, acesse site:
`https://sites.google.com/site/selecaoconesul/`